從信號與系統到控制

單元：摺積系統定理 - 4

摺積操作之下 的 穩定性 系統定理

授課老師： 連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 瞭解 摺積計算操作 之下
  所衍生出來的 系統 性質與定理

- 非記憶性
- 可逆性
- 因果性
- 穩定性

系統的穩定性

- 穩定的系統 (Stable) 的定義 (Definition)
- 輸入該系統的微小的輸入信號，
  並不會產生發散的輸出信號。
- 也就是：
- 針對每一個時刻的數值是有限的輸入信號，
  所產生的輸出信號的數值大小，也是會有限的。

系統的穩定性

- 針對每一個有限的輸入信號，
  所產生的輸出信號，也是有限的。

$$h[n]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow y[n]$$

$$|\,x[n]\,| < B \quad \text{for all } n \qquad \rightarrow |\,y[n]\,| < M \quad \text{for all } n$$

系統的穩定性

$$\left|y[n]\right| = \left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]\right|$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|x[k]\,h[n-k]\right|$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|x[k]\right|\left|h[n-k]\right|$$

系統的穩定性

$$|y[n]| \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]|\,|h[n-k]|$$

$$\le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B\,|h[n-k]|$$

$$\le B \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n-k]|$$

$|x[n]| < B$ for all n

系統的穩定性

- 如果： $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$ say, $\frac{M}{B}$

$$|y[n]| \le B \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| h[n-k] \right|$$

$$< B \frac{M}{B} = M$$

系統的穩定性 - 離散

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$$

- 穩定的系統 (Stable) 的主要判斷準則

$$h[n]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow y[n]$$

- 如果： $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$
- 當： $|x[n]| < B$ for all n
- 則： $|y[n]| < M$ for all n

系統的穩定性 - 連續

$$x(t)*h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

- 穩定的系統 (Stable) 的主要判斷準則

$$x(t) \longrightarrow \overset{h(t)}{\boxed{\text{LTI}}} \longrightarrow y(t)$$

- 如果： $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(s)|\, ds < \infty$
- 當： $|x(t)| < B$ for all t
- 則： $|y(t)| < M$ for all t

範例 – 時間延遲

- 輸入輸出的關係：

離散： $y[n] = x[n-d]$

連續： $y(t) = x(t-d)$

- 脈衝響應：

$h[n] = \delta[n-d]$

$h(t) = \delta(t-d)$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\delta[n-d]| = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(s)|\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(t-d)|\, ds = 1$$

- 時間延遲 是 穩定的系統

範例 – 累積操作

- 輸入輸出的關係：

離散： $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

連續： $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(s)\,ds$

- 脈衝響應：

$h[n] = u[n]$

$h(t) = u(t)$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| = \sum_{k=0}^{+\infty} |u[n]| = \infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(s)|\,ds = \int_{0}^{+\infty} |u(t)|\,ds = \infty$$

- 累積操作 是 不穩定的系統

系統的穩定性 - 離散 與 連續

$$x(t)*h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)d\tau$$

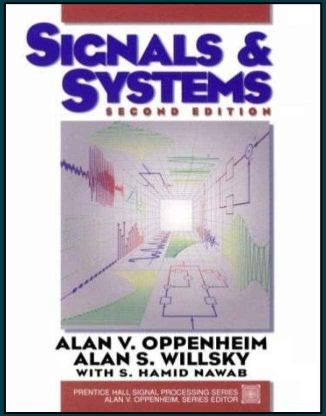
- 穩定的系統 (Stable) 的定理 (Theorem)

$$x[n]\ /\ x(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}}_{\,h[n]\ /\ h(t)} \longrightarrow y[n]\ /\ y(t)$$

- 如果：$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$ $\qquad$ $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(s)|\, ds < \infty$
- 當： $|x[n]| < B$ for all n $\qquad$ $|x(t)| < B$ for all t
- 則： $|y[n]| < M$ for all n $\qquad$ $|y(t)| < M$ for all t

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid, **Signals & Systems**, Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- **SciLab**:
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/