

從信號與系統到控制

單元：連續F轉換-8

傅立葉轉換 範例 - 週期方波函數


授課老師：連 豐 力

單元學習目標與大綱

- 根據 傅立葉轉換 有關 週期信號 的關係式
- 計算 週期方波函數 的 傅立葉轉換

週期信號的 傅立葉轉換 表示式

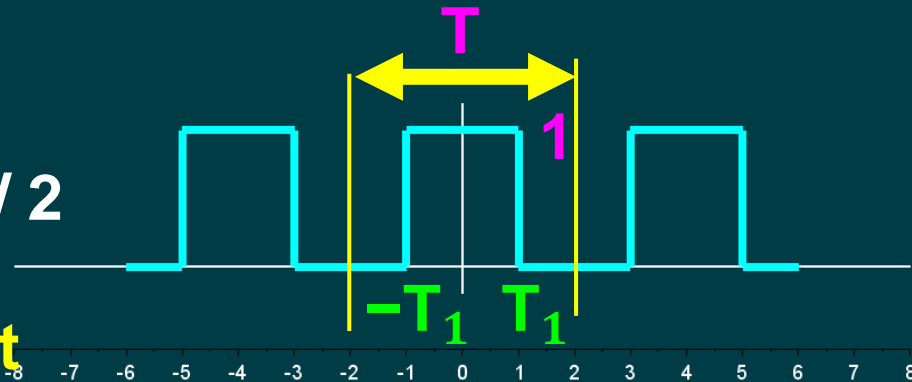
- 一個週期信號的 傅立葉轉換 的關係式：

$$\begin{aligned} x(t) &\xleftrightarrow{\text{FT}} X(j\omega) \\ &\stackrel{\text{FS}}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j k \omega_0 t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k \omega_0) \end{aligned}$$


- 任意的週期信號

週期方波函數的傅立葉轉換

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$



$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j k \omega_0 t} dt$$

$$a_0 = \frac{2T_1}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{k\pi} \sin(k\omega_0 T_1)$$

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

週期方波函數 的 傅立葉轉換

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$a_k = \frac{1}{k\pi} \sin(k\omega_0 T_1)$$

$$a_0 = \frac{2T_1}{T}$$

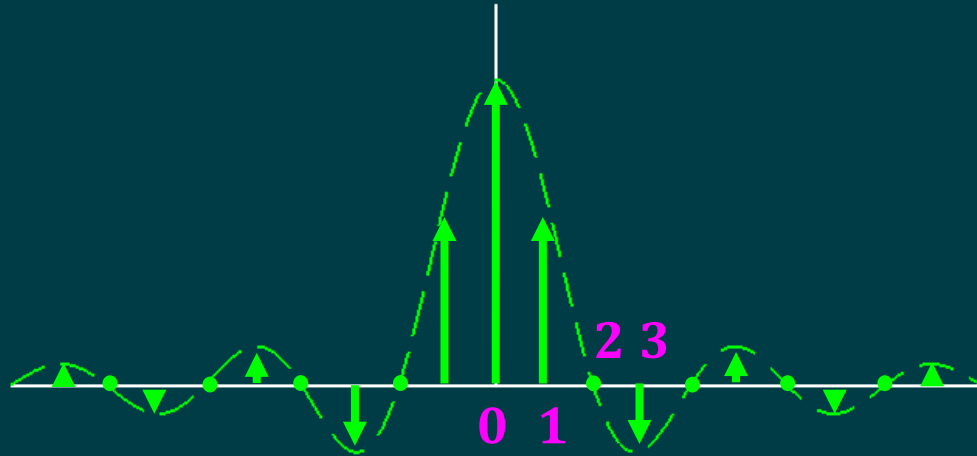
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \cancel{2\pi} \frac{1}{\cancel{k\pi}} \sin(k\omega_0 T_1) \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{k} \sin(k\omega_0 T_1) \delta(\omega - k\omega_0)$$

週期方波函數 的 傅立葉轉換

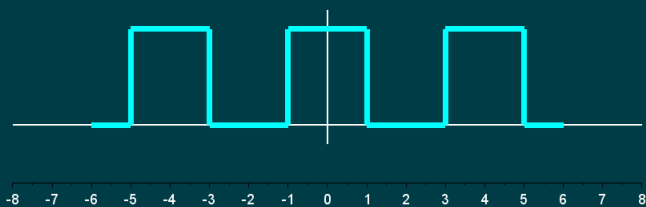
$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{k} \sin(k\omega_0 T_1) \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$\text{sinc}(s) = \frac{\sin(\pi s)}{\pi s}$$

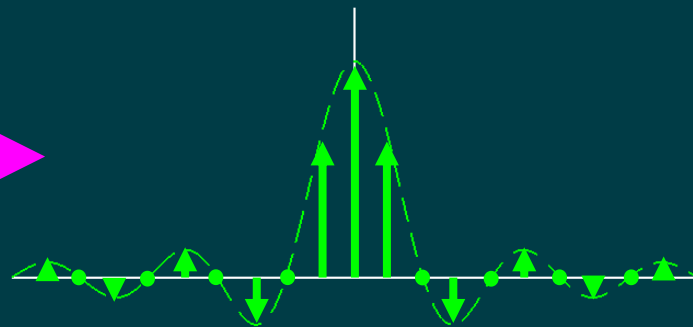


週期方波衝函數的傅立葉轉換

$$\begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases} \xleftrightarrow{\text{FT}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{k} \sin(k\omega_0 T_1) \delta(\omega - k\omega_0)$$

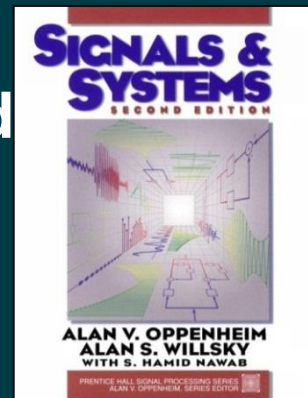


FT



參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
Signals & Systems,
Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- **SciLab:**
Open source software for numerical computation
<http://www.scilab.org/>