從信號與系統到控制

單元：數學工具-4
三角函數 與 指數函數 的積分

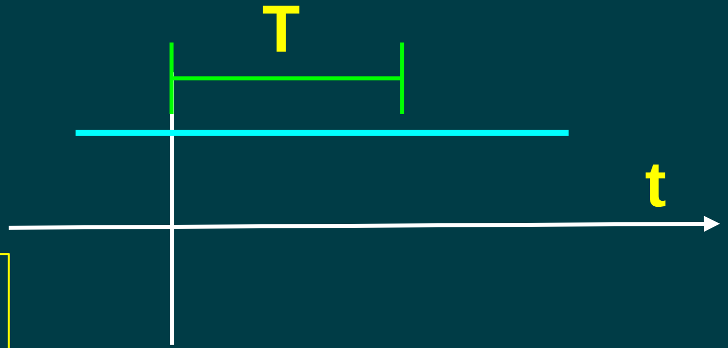
授課老師：連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 討論三角函數的積分
- 討論指數函數的積分
- 討論三角函數與指數函數相乘後的積分

三角函數一個週期的積分

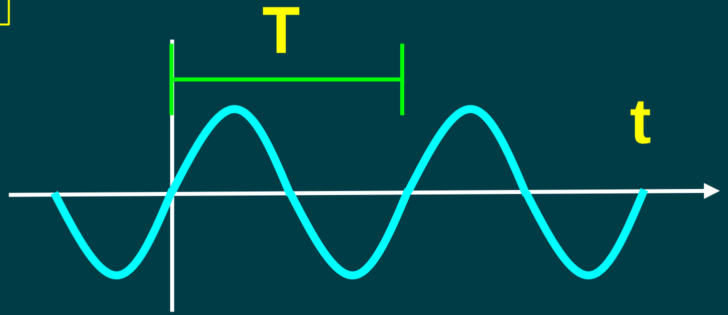
$$\int_T 1 \, dt = T$$



$$\boxed{w_0 = \frac{2\pi}{T}}$$

$$\int_T \sin(w_0 t) \, dt = 0$$

$$\int_T \cos(w_0 t) \, dt = 0$$



三角函數一個週期的積分

$$\int_T \sin(2\,w_0\,t)\,dt = 0$$

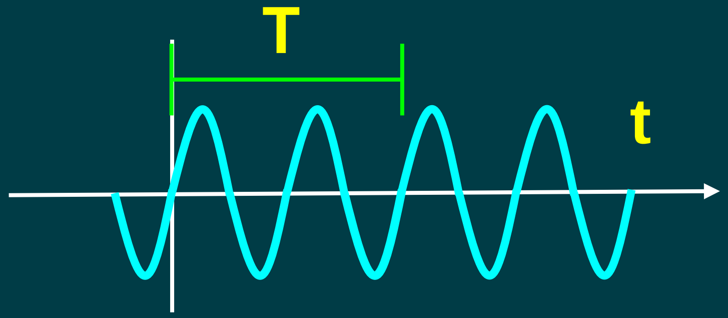
$$\int_T \cos(2\,w_0\,t)\,dt = 0$$

$$\int_T \sin(k\,w_0\,t)\,dt = 0$$

$$\int_T \cos(k\,w_0\,t)\,dt = 0$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$2\,w_0 = \frac{2\pi}{T/2}$$



指數函數一個週期的積分

$$e^{js} = \cos(s) + j\sin(s)$$

$$\int_T e^{j w_0 t}\, dt$$

$$= \int_T \cos(w_0 t) + j \sin(w_0 t) \quad dt$$

$$= \int_T \cos(w_0 t)\, dt + j \int_T \sin(w_0 t)\, dt$$

$$= 0 + j\,0 = 0$$

指數函數一個週期的積分

$$e^{js} = \cos(s) + j\sin(s)$$

$$\int_T e^{jkw_0t}\,dt$$

$$= \int_T \cos(kw_0t) + j\sin(kw_0t)\,dt$$

$$= \int_T \cos(kw_0t)\,dt + j\int_T \sin(kw_0t)\,dt$$

$$= 0 + j\,0 = 0$$

三角函數與指數函數一個週期的積分

$$\sin(s) = \frac{1}{2j}\left(e^{js} - e^{-js}\right)$$

$$\int_T \sin(m w_0 t)\ e^{jnw_0 t}\, dt$$

$$= \int_T \frac{1}{2j}\left[e^{jmw_0 t} - e^{-jmw_0 t}\right] e^{jnw_0 t}\, dt$$

$$= \int_T \frac{1}{2j}\left[e^{j(n+m)w_0 t} - e^{j(n-m)w_0 t}\right] dt$$

$m = -n$ $\quad$ $m = n$

$m \neq -n$ $\quad$ $m \neq n$

三角函數與指數函數一個週期的積分

$m = -n$

$$= \int_T \frac{1}{2j} [e^{j(n+m) w_0 t} - e^{j(n-m) w_0 t}] \, dt$$

$$= \int_T \frac{1}{2j} [e^{j(0) w_0 t} - e^{j(2n) w_0 t}] \, dt \qquad = \frac{-Tj}{2}$$

$$= \int_T \frac{1}{2j} \underbrace{e^{j(0) w_0 t}}_{1} \, dt - \int_T \frac{1}{2j} \underbrace{e^{j(2n) w_0 t}}_{0} \, dt \qquad = \frac{T}{2j}$$

三角函數與指數函數一個週期的積分

$m = n$

$$= \int_T \frac{1}{2j}\left[e^{j(n+m)w_0 t} - e^{j(n-m)w_0 t}\right] dt$$

$$= \int_T \frac{1}{2j}\left[e^{j(2n)w_0 t} - e^{j(0)w_0 t}\right] dt \qquad = \frac{Tj}{2}$$

$$= \int_T \frac{1}{2j}\, \overset{0}{e^{j(2n)w_0 t}}\, dt - \int_T \frac{1}{2j}\, \overset{1}{e^{j(0)w_0 t}}\, dt \qquad = -\frac{T}{2j}$$

三角函數與指數函數一個週期的積分

$m \neq -n \qquad m \neq n$

$$= \int_T \frac{1}{2j} \left[e^{j(n+m)w_0 t} - e^{j(n-m)w_0 t} \right] dt$$

$$= \int_T \frac{1}{2j} \overbrace{e^{j(n+m)w_0 t}}^{0} dt - \int_T \overbrace{e^{j(n-m)w_0 t}}^{0} dt$$

$$= 0$$

三角函數與指數函數一個週期的積分

$m = n$

$$\int_T \sin(m w_0 t)\, e^{j n w_0 t}\, dt = j \frac{1}{2} T$$

$m = -n$

$$\int_T \sin(m w_0 t)\, e^{j n w_0 t}\, dt = -j \frac{1}{2} T$$

$m \neq n$

$$\int_T \sin(m w_0 t)\, e^{j n w_0 t}\, dt = 0$$

三角函數與指數函數一個週期的積分

$$\cos(s) = \frac{1}{2}\left(e^{js} + e^{-js}\right)$$

$$\int_T \cos(m w_0 t)\ e^{j n w_0 t}\,dt$$

$$= \int_T \frac{1}{2}\left[e^{j m w_0 t} + e^{-j m w_0 t}\right] e^{j n w_0 t}\,dt$$

$$= \int_T \frac{1}{2}\left[e^{j (n+m) w_0 t} + e^{j (n-m) w_0 t}\right] dt$$

$m = -n$ $\qquad$ $m = n$

$m \neq -n$ $\qquad$ $m \neq n$

三角函數與指數函數一個週期的積分

$m = -n$

$$= \int_T \frac{1}{2} \left[e^{j(n+m)w_0 t} + e^{j(n-m)w_0 t} \right] dt$$

$$= \int_T \frac{1}{2} \left[e^{j(0)w_0 t} + e^{j(2n)w_0 t} \right] dt$$

$$= \int_T \frac{1}{2} e^{j(0)w_0 t} dt + \int_T \frac{1}{2} e^{j(2n)w_0 t} dt = \frac{T}{2}$$

$1 \qquad 0$

三角函數與指數函數一個週期的積分

$m = n$

$$= \int_T \frac{1}{2} \left[e^{j(n+m)w_0 t} + e^{j(n-m)w_0 t} \right] dt$$

$$= \int_T \frac{1}{2} \left[e^{j(2n)w_0 t} + e^{j(0)w_0 t} \right] dt$$

$$= \int_T \frac{1}{2} \underbrace{e^{j(2n)w_0 t}}_{0} dt + \int_T \frac{1}{2} \underbrace{e^{j(0)w_0 t}}_{1} dt \quad = \frac{T}{2}$$

三角函數與指數函數一個週期的積分

$m \neq -n \qquad m \neq n$

$$= \int_T \frac{1}{2} \left[e^{j(n+m)w_0 t} + e^{j(n-m)w_0 t} \right] dt$$

$$= \int_T \frac{1}{2} e^{j(n+m)w_0 t} dt + \int_T \frac{1}{2} e^{j(n-m)w_0 t} dt$$

$$= 0$$

三角函數與指數函數一個週期的積分

$m = n \qquad m = -n$

$$\int_T \cos(m\,w_0\,t)\; e^{j n w_0 t}\, dt = \frac{1}{2} T$$

$m \neq n \qquad m \neq -n$

$$\int_T \cos(m\,w_0\,t)\; e^{j n w_0 t}\, dt = 0$$

三角函數與指數函數一個週期的積分

$$\int_T e^{jk w_0 t}\, dt = 0$$

$$\int_T \cos(m w_0 t)\, e^{jn w_0 t}\, dt = \frac{1}{2}T \qquad m = n$$

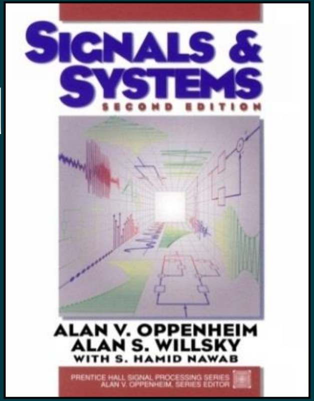
$$= 0 \qquad m \neq n$$

$$\int_T \sin(m w_0 t)\, e^{jn w_0 t}\, dt = j\frac{1}{2}T \qquad m = n$$

$$= 0 \qquad m \neq n$$

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- SciLab:
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/